



## **Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec**

Izabella **Oliveira**

Univesité Laval

Canadá

[izabella.oliveira@fse.ulaval.ca](mailto:izabella.oliveira@fse.ulaval.ca)

Marcelo **Câmara** dos Santos

Universidade Federal de Pernambuco

Brasil

[marcelocamaraufpe@yahoo.com.br](mailto:marcelocamaraufpe@yahoo.com.br)

### **Resumo**

Pesquisas realizadas no Brasil sobre a aprendizagem da álgebra (Da Rocha Falcão, 1997; Teles, 2004; Lins e Gimenez, 2005) mostram que os alunos apresentam grandes dificuldades para resolverem problemas com esse tipo de estrutura. Elas vão na mesma direção dos estudos realizados no Québec (Kieran, 1992, 1995; Marchand e Bednarz, 1999, 2000), particularmente aqueles que adotam como abordagem didática a resolução de problemas. Em nosso estudo investigamos que estratégias são mobilizadas por alunos de 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de estrutura algébrica. Para isso analisamos, nos dois países, a produção de 708 alunos desse nível de escolaridade na resolução de problemas de partilha, em que fizemos variar o encadeamento e a natureza das relações envolvidas. Os resultados mostram que certas estruturas de problemas são mais difíceis para os alunos que outras, e que o tipo de operação associada às relações entre as incógnitas também influencia o sucesso dos alunos.

*Palavras-chave:* resolução de problemas; problemas algébricos; pensamento algébrico; estrutura aditiva e multiplicativa; problemas de partilha.

### **Elementos teóricos**

Os resultados obtidos em avaliações de larga escala têm demonstrado a grande dificuldade dos alunos da escola básica no trabalho com álgebra; pode-se perceber que, nos itens referentes à álgebra nesses instrumentos, raramente os alunos atingem o índice de 40% de acertos. Lins e Gimenez (2005) consideram que o fracasso em álgebra significa um fracasso absoluto na escola,

e que um dos principais obstáculos a esse aprendizado é que “a álgebra escolar representa o que eles chamam de “momento de seleção”, na educação escolar. Segundo esses autores, existe uma grande dificuldade em perceber a existência de uma ruptura epistemológica nessa passagem do raciocínio aritmético para o algébrico, o que exige uma transição para a introdução de uma nova linguagem e forma de raciocínio lógico-matemático.

Diversas pesquisas têm mostrado as dificuldades dos alunos para a aprendizagem da álgebra. Alguns pesquisadores estudaram dificuldades a partir do ponto de vista epistemológico (Chevallard, 1992 e Kieran, 1992). Eles colocaram em evidência a existência de uma ruptura entre o raciocínio em aritmética e em álgebra. Vergnaud e Cortes (1986), por sua vez, ampliam para uma dupla ruptura epistemológica: “por um lado a introdução de um desvio formal para o tratamento dos problemas habituais, tratados intuitivamente; por outro lado, a introdução de objetos matemáticos novos, como equação e incógnita...”. No plano cognitivo, B. Grugeon (1995) afirma que as competências algébricas são estruturadas segundo duas dimensões: instrumento (capacidade de produzir expressões algébricas que traduzem um problema) e objeto (aspecto sintático e semântico das expressões algébricas para manipulá-las formalmente).

Segundo Da Rocha Falcão (1997), a provável reação de alunos de escolas típicas do sistema educacional, quando são introduzidos à álgebra elementar, reflete uma perspectiva parcial acerca da álgebra, frequentemente veiculada nos manuais (livros didáticos) e enfatizada em sala de aula. Nessa perspectiva, a álgebra se refere basicamente a um conjunto de regras de manipulação que permitem passar da equação à resposta. Dito de outra forma, a álgebra não passaria de apenas um objeto matemático, abandonando-se o seu caráter de ferramenta.

Em estudo feito com alunos de 13 anos envolvendo equações e expressões algébricas, Kieran (1995) percebeu que eles resolviam as equações por dois procedimentos diferentes, um baseado em raciocínios algébricos, e outro em raciocínios aritméticos. Para cada um desses grupos, as letras assumiam significados distintos.

Diferentes estudos (Falcão, 1996, Pomerantsev e Korosteleva, 2002 e Teles, 2004), porém, não conseguem delimitar com a devida clareza os tipos de obstáculos que poderiam explicar a origem dos erros e dificuldades apontados, isto é, se os erros e dificuldades repertoriados são, por exemplo, motivados por obstáculos de origem epistemológica ou didática (Brousseau, 1997). Mesmo os estudos que se propuseram a identificar concepções de alunos e professores, referentes a conceitos algébricos (Kieran, 1995 e Lima Borba e Da Rocha Falcão, 2004), que muitas vezes são responsáveis por algum tipo de erro cometido pelo aluno, não deixam devidamente claro se o uso inadequado de tais concepções é decorrente de algum tipo de obstáculo.

Do ponto de vista do ensino, de acordo com Bednarz, Kieran e Lee (1996), a abordagem da álgebra na escola pode ser feita por meio de muitas ideias, em particular a resolução de problemas, abordagem que historicamente tem assumido um importante papel no desenvolvimento e ensino da álgebra. Bednarz, Kieran e Lee (1996) verificaram que, muitas vezes, o aluno não consegue identificar a expressão algébrica associada a um problema em linguagem natural, seja ela uma equação ou um sistema de equações de 1º grau, por exemplo. Em situação de resolução de problemas, o esforço prévio de “armar” a equação é cognitivamente mais trabalhoso que o trabalho posterior de escolha e execução de um algoritmo algébrico, de acordo com Kieran (1992). Tal afirmação nos leva a acreditar que, talvez, a maior dificuldade dos alunos ao lidar com problemas de natureza algébrica resida na tradução dos dados de um

determinado enunciado para outro tipo de registro de representação, o que Duval (2003) chama de conversão, ação fundamental para a resolução de problemas de estrutura algébrica.

Problemas dessa natureza foram estudados por Marchand e Bednarz (1999), que identificam três categorias de problemas, “problema de transformação”, “problema de taxa” e “problema de partilha”. Em um problema de partilha, objeto de nosso estudo, aparecem relações entre os dados (incógnitas) e uma quantidade total (conhecida), que é expressa em função de suas diferentes partes (desconhecidas). Entre essas partes são estabelecidas relações de comparação, levando a uma composição dessas relações.

No caso de problemas de partilha, Marchand e Bednarz (1999) identificam algumas variáveis ligadas às relações envolvidas que podem modificar as estratégias (e a performance) dos alunos, o “número”, a “natureza” e o “encadeamento” das relações. Em nosso trabalho fixamos a variável número de relações em duas, fazendo variar as outras. A natureza das relações está ligada às operações entre elas; por exemplo, a sentença *recebe 3 a mais* se caracteriza como de natureza aditiva, enquanto a sentença *recebe o dobro* se refere a uma estrutura multiplicativa.

Em relação ao encadeamento das relações, as autoras identificam três categorias de problemas, tipo fonte, tipo composição e tipo poço. No encadeamento tipo fonte, as relações envolvidas são geradas a partir de uma mesma grandeza. O problema a seguir exemplifica a sua estrutura: “*Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um*”. Esse problema apresenta duas relações de comparação (três incógnitas), sendo a primeira aditiva e a segunda multiplicativa; seu encadeamento é do tipo fonte, na medida em que Frederico é a “fonte” das relações com Lúcia e com Rogério.

No encadeamento tipo composição, as relações são estabelecidas em sequência, como ilustra o problema seguinte: “*Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?*”.

Finalmente, no encadeamento tipo poço todas as relações convergem para um dos dados do problema, como mostra o exemplo “*João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?*”. Nesse caso, vemos que as duas relações convergem para Pedro.

Em termos de estratégias possíveis de serem mobilizadas pelos sujeitos, podemos classificá-las em dois tipos, estratégias aritméticas e estratégias algébricas. Em uma estratégia aritmética, o aluno parte de valores conhecidos *tentando criar pontes* (Marchand e Bednarz, 2000) para chegar aos valores desconhecidos, caracterizando-se por um raciocínio sintético. Já em estratégias algébricas, o aluno parte dos elementos desconhecidos estabelecendo relações, em um raciocínio analítico.

Nossa questão de investigação se coloca, então, em termos das estratégias mobilizadas por alunos de 6º ano em problemas do tipo partilha.

### **Metodologia**

Nesse trabalho apresentamos um recorte de uma pesquisa que vem sendo desenvolvida em parceria com o CRIRES – Centre de Recherche sur l'Intervention et la Réussite Scolaire da

Université Laval (Canadá)<sup>1</sup> e o Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática<sup>2</sup> da Universidade Federal de Pernambuco, que analisa não somente as estratégias mobilizadas pelos alunos, mas possíveis relações com o processo de ensino (prática de ensino) e o tipo de atividade matemática que é induzida nos alunos por essa prática. Dessa forma, esse estudo diagnóstico sobre as estratégias privilegiadas pelos alunos para resolver problemas de estrutura algébrica, pretende servir de suporte para a elaboração de engenharias didáticas.

Par tal, investigamos as estratégias utilizadas por 473 alunos de 6º ano, sendo 333 alunos de 4 escolas da cidade do Recife e 140 alunos de 5 escolas da região de Québec (a escolha dos alunos baseou-se unicamente no ano de ensino e na disponibilidade dos professores). Cada aluno resolveu individualmente 7 problemas de estrutura algébrica. O primeiro problema envolve apenas uma relação, para facilitar a entrada do aluno na resolução, e os outros 6 problemas envolvem duas relações. Nesses, buscamos variar tanto o tipo de encadeamento (fonte, composição e poço) quanto a natureza das relações (aditivas e multiplicativas). A análise dos dados foi feita a partir de dois eixos, rendimento (acerto, erro e não resposta) e estratégia inicial privilegiada. No presente trabalho, não discutimos as estratégias secundárias dos alunos, ou seja, a estratégia adotada em função do fracasso da estratégia inicial.

### Resultados

Nós apresentaremos de maneira conjunta os resultados dos alunos brasileiros e quebequenses, seguidos de uma análise cruzada dos resultados obtidos por esses dois grupos.

Em relação ao rendimento, nossos resultados indicam que os problemas de tipo poço se mostram mais difíceis para o aluno. Nesse tipo de problema, tanto os alunos brasileiros quanto os alunos quebequenses apresentam maiores dificuldades, apenas 23% e 39% respectivamente dos sujeitos obteve sucesso, contra 33% e 45%, respectivamente, para problemas do tipo composição e 44% e 63% para problemas do tipo fonte, como mostra a tabela 1.

Tabela 1

#### *Rendimento por encadeamento de relações*

Tipo de problema	Fonte		Composição		Poço	
	Brasil	Québec	Brasil	Québec	Brasil	Québec
Acertos	44%	63%	33%	45%	23%	39%
Erros	41%	25%	43%	28%	39%	36%
Não resposta	15%	12%	24%	27%	38%	26%

Podemos observar, também, que nesse tipo de problema encontramos o maior percentual de alunos que deixou o problema em branco, o que reforça o aspecto de dificuldade desse tipo de encadeamento de relações, como indicam os trabalhos realizados anteriormente (Marchand e Bednarz, 1999, 2000). Notamos que, mesmo se os alunos quebequenses apresentam um rendimento mais alto que os alunos brasileiros nos diferentes tipos de problema, a estrutura do problema influencia igualmente o rendimento desses alunos. De fato, nesse tipo de problema, a

<sup>1</sup> Projeto: Pratique d'enseignement des mathématiques au primaire et activité mathématique induite chez les élèves autour de la notion de situation-problème : une analyse à travers les gestes professionnels. Financiado pelo FQRSC–Fonds québécois de recherche sur la culture et la société (2009–2012).

<sup>2</sup> Projeto: Investigando o ensino-aprendizagem da álgebra escolar sob a ótica dos fenômenos didáticos: o caso das equações de primeiro grau. Financiado pelo CNPq, Edital: MCT/CNPq N° 014/2008.

identificação da estrutura requer que o sujeito considere as operações inversas daquelas presentes no enunciado. Exemplificando, dizer que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio implica que o aluno estabeleça as relações  $J=P+25$  e  $C=P+15$ .

### **Estratégias utilizadas pelos alunos**

No total dos instrumentos, cinco estratégias de base foram identificadas: Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Algébrica (AL), considerar o Total como Fonte (TF) e realizar um Cálculo Qualquer (CQ), além dos casos em que não foi possível identificar a estratégia mobilizada pelo sujeito (NI). A tabela abaixo mostra as estratégias de base utilizadas pelos alunos, levando em consideração todos os problemas.

Tabela 2

#### *Estratégias mobilizadas pelos alunos*

	Brasil	Québec
Atribuir valores (AV)	40%	47%
Dividir por 3 (D3)	34%	25%
Algébrica (AL)	9%	4%
Considerar o total como fonte (TF)	8%	10%
Cálculo qualquer (CQ)	6%	3%
Não identificada (NI)	3%	16%

Podemos perceber que, no total dos problemas apresentados aos alunos, a grande maioria dos sujeitos adota as estratégias aritméticas AV e D3 como estratégias de base, sendo a estratégia AV preferida por 40% dos alunos brasileiros e 47% dos alunos quebequenses. Os resultados nos permitem ver que a estratégia privilegiada pelos alunos permanece constante, mesmo quando o tipo do problema muda. Nesse caso, os alunos privilegiam a estratégia AV, tanto no Brasil quanto no Québec. Isso nos leva a inferir que a escolha da estratégia pelo aluno vai além do tipo de problema proposto, pelo menos no caso de alunos que não receberam, ainda, um ensino formal sobre as estruturas algébricas.

Entretanto, analisando com maior detalhe o percentual do tipo de estratégia no interior de cada encadeamento de relações, podemos observar, na tabela seguinte, que a escolha da estratégia de base AV cresce em função da complexidade das relações, atingindo o percentual de 44% e 59% em problemas do tipo poço. Por outro lado, a escolha da estratégia D3 diminui em função da complexidade das relações, apresentando pouca variação em relação ao encadeamento das relações. Da mesma forma, decresce igualmente o recurso à estratégia algébrica (AL), sendo mais adotada em problemas do tipo fonte. Em outros termos, os resultados parecem indicar que existe uma relação entre as estratégias AV, D3 e AL que precisa ser melhor investigada.

Tabela 3

Estratégias de base por encadeamento de relações

	Fonte		Composição		Poço	
	Brasil	Québec	Brasil	Québec	Brasil	Québec
Atribuir valores (AV)	37%	36%	40%	51%	44%	59%
Dividir por 3 (D3)	32%	21%	33%	23%	36%	16%
Algébrica (AL)	12%	5%	9%	1%	6%	5%
Considerar o total como fonte (TF)	11%	12%	6%	8%	7%	11%
Cálculo qualquer (CQ)	5%	3%	9%	2%	6%	3%
Não identificada (NI)	3%	23%	3%	15%	2%	17%

Análise por estratégia inicial

Nessa seção, apresentaremos as estratégias de base utilizadas pelos alunos antes do ensino formal da álgebra na escola. Cada uma delas será exemplificada a partir da resolução de um problema por um aluno do Brasil e outro do Québec.

Na estratégia AV, o aluno atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas, como mostra a figura a seguir.

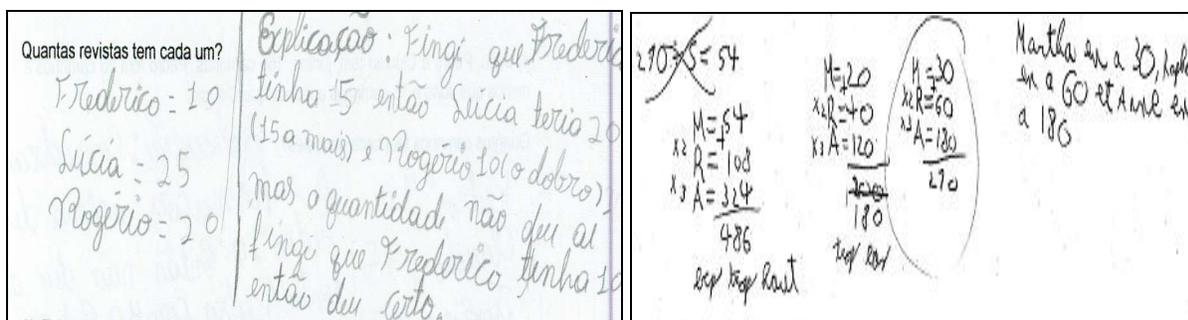


Figura 1. Exemplos da estratégia AV – Atribuir Valores.

No caso desses alunos podemos observar que, após determinar as relações, eles verificam se o total está adequado ao enunciado do problema, chegando à resposta correta. Em outros casos, o sujeito não se preocupa em verificar a coerência dos valores encontrados para as incógnitas com o total do problema.

No caso dos alunos brasileiros, em problemas tipo fonte, 56% dos sujeitos que adotam essa estratégia de base conseguem atribuir o valor correto à incógnita em uma primeira tentativa; os outros, após verificar a coerência com o total, partem para a atribuição de novos valores. Já para os problemas tipo composição, 60% dos sujeitos precisaram realizar mais de uma tentativa, comparando os resultados obtidos com o total, até encontrar os valores adequados para as incógnitas. Podemos observar que os alunos quebequenses também precisam de mais tentativas para chegar à resposta do problema quando a estrutura desse é mais difícil (composição) e quando os números são mais altos.

Na estratégia de base dividir por 3 (D3), o sujeito inicia o problema dividindo o total fornecido para as três incógnitas do problema, como se a partilha desse valor fosse em partes iguais. O primeiro extrato de protocolo abaixo ilustra essa estratégia, para o problema dos esportes e o segundo para o problema dos chaveiros.

**Ex. 1:** Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

Handwritten work for Example 1:

$$\begin{array}{r} 180 \overline{) 3} \\ \underline{-18} \phantom{0} \\ 00 \phantom{0} \\ \underline{-00} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 3} \\ \underline{-6} \phantom{0} \\ 00 \end{array}$$

Fut: 60  
V: 20  
Bas: 40

**Ex. 2:** Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?

Handwritten work for Example 2:

$$270 \div 3 = 90$$

Raphael =  $x3 = A$   
Martha =  $x2 = R$   
Anne =  $\div 3 = R$

Anne = 90 por  $\div 3$   
Raphael = 60 por  $\div 3$   
Martha = 30 por  $\div 3$

Figura 2. Exemplos da estratégia D3 – Dividir por três.

No primeiro caso, o aluno divide o total (180) em três grupos, obtendo 60. Em seguida ele adota o valor encontrado (60) como sendo o valor de uma das incógnitas (futebol). Após isso, ele estabelece as duas relações, encontrando os valores dos outros elementos desconhecidos. A incógnita escolhida pelo aluno (geralmente a primeira que aparece no enunciado do problema) funciona como uma espécie de fonte para a obtenção das relações. No segundo caso, o aluno utiliza essa mesma estratégia, só que partindo do 270 (o número total de chaveiros) para em seguida estabelecer as duas relações ( $\times 3$  e  $\times 2$ ).

Utilizar o resultado da divisão por três como o valor de uma das incógnitas determinando as relações do problema, caso dos extratos de protocolo mostrados anteriormente, é a estratégia mais adotada em problemas tipo composição (48% e 23%). A dificuldade em conseguir identificar a estrutura associada a um problema tipo poço aparece reforçada quando observamos que um em cada três alunos (34%), nesse tipo de encadeamento, ou abandona a resolução após dividir por três, ou adota como resposta para o problema o valor obtido nessa divisão, considerando apenas uma das incógnitas. Entretanto, podemos observar que no caso dos alunos quebequenses esse valor aumenta para 36% o que nos leva a pensar que esses alunos se apropriam mais facilmente das relações estabelecidas no problema, na medida em que eles são capazes de, além de dividir por três na primeira etapa da resolução, de continuar com o mesmo raciocínio e utilizar essa resposta (no exemplo mostrado, o 90 do  $270 \div 3 = 90$ ) para estabelecer as outras relações. Nesse caso, podemos dizer que eles não perdem de vista a estrutura do problema.

Na estratégia algébrica (AL), ao contrário das aritméticas, o sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas, como na figura a seguir.

**Ex. 1:** Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

**Ex. 2:** Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?

Figura 3. Exemplos da estratégia AL – Algébrica.

No exemplo 1, tipo fonte, as relações são identificadas pelo sujeito, mesmo que ele não as represente, como sendo V, 3V e 2V. Em seguida, ele equaciona, mentalmente,  $V+3V+2V=180$ , daí a divisão de 180 por 6. No exemplo 2, tipo composição, o sujeito também identifica as relações sem representá-las de maneira algébrica. Em seguida, ele equaciona, mentalmente,  $M+2M+6M=270$ , daí a divisão de 270 por 9.

Os resultados mostram que em problemas cujo encadeamento das relações é do tipo fonte, como o problema apresentado pouco acima, parecem facilitar, para o sujeito, a mobilização correta de estratégias algébricas. De fato, pode-se verificar que, no caso desse tipo de problema, 99% dos sujeitos que mobilizaram estratégias algébricas o fizeram corretamente; esse percentual decresce com os outros dois tipos de problema.

A estratégia de base considerar o total como fonte (TF) consiste em associar o total do problema ao valor de uma das incógnitas, como mostra a figura abaixo.

**Ex. 1:** Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

**Ex. 2:** Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros tem cada um?

Figura 4. Exemplos da estratégia TF – Total como Fonte.

Na resolução desse tipo de problema, o sujeito, após adotar o total como o valor de uma

das incógnitas, aplica as duas relações do enunciado e encontra os valores para as outras duas incógnitas. Essa estratégia só foi privilegiada por 8% dos alunos brasileiros e 10% dos alunos quebequenses. Os resultados mostram também que essa estratégia é menos privilegiada nos problemas de tipo composição.

Finalmente, encontramos 6% dos alunos brasileiros e 3% dos alunos quebequenses que não conseguem se apropriar do significado do problema. Nesse caso, eles buscam efetuar uma conta qualquer (estratégia de base CQ) na tentativa de encontrar uma solução.

### **Considerações finais**

Como mencionado anteriormente, nesse trabalho apresentamos um recorte de uma pesquisa que vem sendo desenvolvida em parceria entre o Centre de Recherche et d'Intervention sur la Réussite Scolaire da Université Laval (Canadá) e o Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco. Nesse projeto, buscamos investigar como alunos brasileiros e canadenses, de diferentes etapas de escolarização, se comportam em situação de resolução de problemas de estrutura algébrica. A presente pesquisa pretende fornecer elementos para a construção de processos didáticos que facilitem, ao aluno, desenvolver o pensamento algébrico.

Os resultados desse estudo mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos mostram mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo “poço” e a natureza das relações é multiplicativa/multiplicativa (MM). Já em problemas tipo “composição”, os alunos demonstram mais facilidade quando a primeira relação é multiplicativa (MM e MA), o que pode estar relacionado ao tipo de representação que o aluno elabora a partir do enunciado do problema. Esses resultados corroboram os encontrados por Marchand e Bednarz (1999, 2000).

Estratégias que fazem recurso a raciocínios aritméticos, em que se busca partir de valores atribuídos para as incógnitas, são mobilizadas por 80% dos alunos de 6º ano, tanto no Brasil quanto no Québec. Encontramos, em nosso estudo, que somente 13% deles se servem de estratégias mobilizando o pensamento algébrico, em que o ponto de partida são as relações estabelecidas entre as incógnitas. Isso parece reforçar o peso que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem na formação do pensamento matemático dos alunos. Duas estratégias aritméticas são mais mobilizadas pelos alunos. Na primeira delas, o aluno busca dividir o total em três partes iguais, como se a partilha devesse ser realizada equitativamente. É importante mencionar que em alguns problemas, como o dos chaveiros visto anteriormente, a divisão por três permite ao aluno encontrar uma das relações. Entretanto, em outros problemas, essa estratégia leva o aluno a uma resposta errônea, em que o resultado da divisão por três significa a resposta do problema e não uma das relações. Encontramos, ainda, alunos que explicam que essa divisão serve para “encontrar uma base” que facilitará, em seguida, o estabelecimento das relações. Aqui, eles começam a resolução do problema pela estratégia Dividir por Três, mudando em seguida para a estratégia Atribuir Valor. Na segunda estratégia, Atribuir Valor, o aluno atribui um valor a uma das incógnitas do problema para, em seguida, determinar os outros valores, aplicando as relações entre as incógnitas. Ressaltamos que a maioria das vezes não nos foi possível identificar o que leva os alunos a escolherem o valor que será utilizado como ponto de partida; seria necessário um estudo com metodologia diferente para obter respostas à essa questão.

Podemos ressaltar também que, mesmo trabalhando com sujeitos que ainda não foram apresentados à álgebra na escola, ainda encontramos 10% deles que buscam mobilizar um

raciocínio algébrico para encontrar a solução do problema. Evidentemente a representação simbólica ainda é pouco mobilizada por eles, que priorizam a representação mental da equação associada ao problema.

A análise das estratégias mobilizadas pelos alunos brasileiros e quebequenses de 6º ano mostra que não existe muita diferença entre esses dois grupos quanto ao índice de acertos. Em relação às estratégias privilegiadas, esses dois grupos preferem as estratégias aritméticas para resolver os problemas. Nós pudemos observar uma presença importante de estratégias não identificadas nos alunos quebequenses. As análises nos permitem fazer a hipótese que essas estratégias seriam, de fato, associadas à estratégia atribuir valores; nesse caso, sem traços escritos das tentativas dos alunos.

### **Limites do estudo e pesquisas futuras**

Para encerrar lembramos mais uma vez que se trata de um estudo com características de diagnóstico cujo instrumento de coleta de dados comporta somente a resolução, com papel e lápis, de uma tarefa, o que limita o tipo de análise que podemos fazer. É imprescindível, e isso está contemplado na continuidade do estudo, a aplicação de entrevistas com os alunos, para afinar as nossas hipóteses e ter acesso às escolhas da estratégia a ser usada pelos alunos e as em relações possíveis entre essas escolhas e a estrutura do problema. Da mesma forma, nos parece importante a observação de aulas, para verificarmos em que medida a prática de ensino do professor, no momento em que ele ensina as equações algébricas, pode interferir na escolhas de estratégias por parte dos alunos.

Como citado anteriormente, esse trabalho faz parte de um projeto mais amplo que contempla não somente estudos diagnósticos, mas, também, a elaboração de engenharias didáticas. Ele se interessa também às práticas de ensino implementadas em classe e sua relação com as atividades matemáticas desenvolvidas pelos alunos. Em outros termos, a presente pesquisa pretende fornecer elementos para a construção de processos didáticos que facilitem, ao professor, a construção de sequências de ensino adequadas e, ao aluno, desenvolver o pensamento algébrico.

### **Referências bibliográficas**

- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Amsterdam: Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics : didactique des mathématiques, 1970-1990*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Chevallard, Y. (1992). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. Perspective curriculaire: la notion de modélisation. *Petit X*, 19,45-75.
- Da Rocha Falcão, J. T. (1996). Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among brasilian students: principal aspects and didactic issues. *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education - PME*, 2, 257-264. Seville: Spain.
- Da Rocha Falcão, J. T. (1997). A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs) *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. Universitária da UFPE.
- Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Sílvia Dias Alcântara (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus.

- Grugeon, B.(1995). Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement. *Tese de Doutorado*. Université Paris 7.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of school algebra. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*. Douglas A. Grows (ed). New York: Macmillan, 390-419.
- Kieran, C. (1995). Duas Abordagens Diferentes entre os Principiantes em Álgebra. In *As idéias da Álgebra*. Organizado por Coaxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo: Atual.
- Lima Borba, V. M.& Da Rocha Falcão, J. T. (2004). Análise clínico-descritiva das concepções dos professores de matemática do ensino fundamental acerca da álgebra elementar como campo conceitual e conteúdo didático-pedagógico. In: *Anais do VIII Encontro de Educação Matemática*. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM.
- Lins, R. C. & Gimenez, J. (2005). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 5ª Edição. Campinas: Papirus.
- Marchand, P. & Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, 39,(4), 30-42.
- Marchand, P. & Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ*, 40 (4), 15-25.
- Pomerantsev, L. & Korosteleva, O. (2002). *Do Prospective Elementary And Middle School Teachers Understand The Structure Of Algebraic Expressions?* Long Beach: California State University.
- Teles, R. A. M. (2004). A Relação entre a Aritmética e a Álgebra na Matemática Escolar: a influência da compreensão das propriedades da igualdade e o conceito de operações inversas na resolução de equações polinomiais do 1º grau. *Anais do VIII Encontro de Educação Matemática*. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM.
- Vergnaud G. & Cortes A. (1986). Introducing Algebra to low-level 8th and 9th graders. *Proceedings of the tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Londres, 319-324.